Visualizando los límites de funciones y las derivadas con geometría dinámica

María del Carmen Bonilla
Asociación Peruana de Investigación en Educación Matemática
mc_bonilla@hotmail.com, mbonilla@pucp.edu.pe

María Elena Villanueva Pinedo
Universidad Nacional Agraria La Molina (UNALM)
villanuepi@lamolina.edu.pe

Rocío Consuelo Delgado Aguilar
Universidad Nacional Agraria La Molina (UNALM), Perú
dare@lamolina.edu.pe

Resumen

La propuesta didáctica fue aplicada en el curso de Cálculo Diferencial de la UNALM, y puede utilizarse en cursos de Cálculo de Bachillerato, Institutos Superiores y Universidades. El objetivo principal que se persigue es lograr la comprensión de las nociones de límites de funciones y derivadas (Stewart, 2002) a través de la exploración y visualización de las gráficas presentadas en Cabri II Plus. Las actividades diseñadas podrían constituir *pruebas explicativas de carácter "heterogéneo"* (Hanna & Sidoli, 2007) de las definiciones de límites de funciones y de derivadas. En el taller de dos sesiones, de 90 minutos cada uno, los participantes aprenderán en la primera sesión a elaborar actividades en Cabri II plus relacionadas con la definición de límites de funciones de una manera intuitiva, en primer lugar, y luego la definición utilizando el épsilon y el delta. En la segunda sesión, primero, se construirá gráficamente la definición de derivada de la función en un punto y su interpretación geométrica como la pendiente de la recta tangente en ese punto, y a continuación se construirán algunos ejemplos de aplicación de la derivada a situaciones de optimización. Los participantes deberán tener conocimientos elementales de Cálculo Diferencial.

La propuesta didáctica se basa en investigaciones en el campo de la filosofía de la matemática, y su relación con la Educación Matemática, que establecen una distinción entre pruebas matemáticas que prueban y pruebas matemáticas que explican

(Hanna, 1989), así como en la visualización, exploración y heurística, que fomentan la comprensión de las nociones matemáticas (Hanna, 2000).

Palabras clave: Límite de funciones, derivadas, visualización, pruebas explicativas heterogéneas.

Eje temático: Matemática avanzada con Cabri.

Introducción

En el desarrollo de la práctica matemática en las tres últimas décadas se ha establecido nuevos tipos de prueba y argumentación, cambiándose las normas establecidas en el área (Hanna, Jahnke y Pulte, 2006). Los cambios se han producido por el uso de las computadoras (como recurso heurístico o como medio de verificación), por un nuevo tipo de relación de las matemáticas con las ciencias empíricas y la tecnología, y por un fuerte inconsciente en la naturaleza social de los procesos que guían la aceptación de una prueba.

En Educación, entre las varias funciones de la prueba, la explicación es la primera. Uno de los más efectivos caminos para conseguirla es con el uso de la geometría dinámica (Hanna, 2000), porque ayuda a los estudiantes a desarrollar el pensamiento matemático, a producir evidencias válidas, a desarrollar la intuición, especulación y heurística, así como a mejorar la comprensión de las nociones matemáticas. La Geometría Dinámica es exitosa en mejorar la habilidad de los estudiantes en darse cuenta de los detalles, a atreverse a explorar, proponer y probar conjeturas, reflexionar, interpretar relaciones y proporcionar explicaciones provisionales y pruebas. Entre los matemáticos existe el consenso de que la intuición, especulación y heurística son útiles en los pasos preliminares para la obtención de resultados matemáticos, y que el razonamiento intuitivo sin la prueba no es una rama especulativa, separada de las matemáticas.

Con esa finalidad se han diseñado actividades en Cabri II Plus para la enseñanza de las nociones de límite de funciones y de derivadas, actividades que procuran la experimentación, el arrastre de los objetos matemáticos, y una mejor comprensión de las propiedades matemáticas implícitas en la noción.

1. Límite de Funciones

a) Aproximación intuitiva

Dada la función:

Calcular, si existe

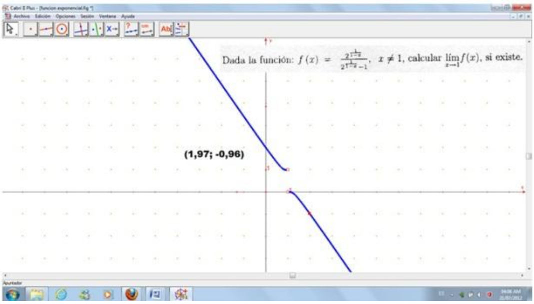

Figura 1

b) Definición formal de límite de función

Sea f una función definida sobre el intervalo abierto que contiene el número , excepto cuando se define a si misma. Entonces decimos que el límite de f(x) cuando x tiende o se aproxima a es L y escribimos

Si para cada número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que

siempre que

Figura 2

2. Derivada de una función en un punto

El límite

si existe y es finito, recibe el nombre de **derivada** de la función en el punto "a" y representa la variación de la función f en el punto $x = a$. Se representa por

Si en la definición anterior hacemos
cuando h tiende a cero, entonces ***x*** tiende a "***a***" y la derivada de la función en el punto a nos queda de la forma:

Geométricamente, si vamos acercando el punto P hacia el punto P_0 (h tiende a cero), la recta secante se transforma en tangente a la gráfica de la función. En consecuencia, la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = a$.

a) Derivadas Laterales:

Derivada por la izquierda

Se llama derivada por la izquierda de la función f en el punto $x = a$ al siguiente límite, si es que existe:

Derivada por la derecha

Se llama derivada por la derecha de la función f en el punto $x = a$ al siguiente límite, si es que existe:

Evidentemente, una función es derivable en un punto sí, y sólo sí, es derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto y las derivadas laterales son iguales.

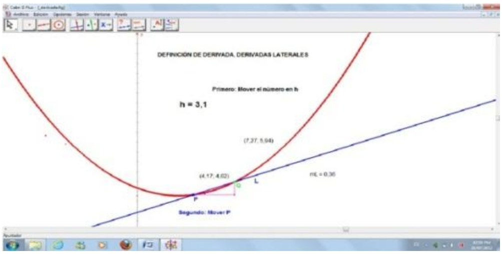

Figura 3

b) Problema de optimización

Un recipiente de almacenamiento sin tapa debe tener 60 m3 de volumen. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material de la base cuesta S/. 10 por m2, y el de los lados S/. 6 por m2. Calcular el costo mínimo de los materiales para tal recipiente. Tomado de: Examen Final del Curso Cálculo Diferencial del verano del 2010.

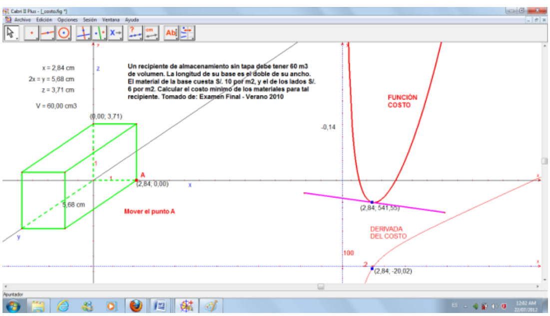

Figura 4

Referencias

Hanna, G. (1989). Proofs That Prove and Proofs That Explain. En: G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.). *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (13th, Paris, France, July 9-13, 1989)*, (2), 45-51. Recuperado de http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED411141.pdf

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematic,* Special issue on "Proof in Dynamic Geometry Environments", 44 (1-2), 5-23. Copyright 2001. Recuperado de http://www.fing.edu.uy/imerl/didactica_matematica/Documentos_2008/Hanna-2000.pdf

Hanna, G. & Sidoli, N. (2007). Visualization and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39(1-2), 73-78.

Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4ta ed.). Bogotá: Thomson Learning.

❖❖❖